Neuer Beweis für die explizite Reziprozitätsformel der l-ten Potenzreste im l-ten Kreiskörper.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

der Universität zu Marburg a. d. Lahn

vorgelegt von

Herbert Vennekohl

aus Essen.

Marburg 1932.

Als Dissertation angenommen am 8. Juli 1931.

Referent: Professor Dr. H. Hasse.

Tag der mündlichen Prüfung 8. Juli 1931.

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554407_0145

Inhaltsübersicht.

Seite
Einleitung 233
§ 1. Vorbereitende Hilfssätze 234
§ 2. Das Normenrestsymbol für λ 238
§ 3. Beweis für die explizite Reziprozitätsformel 242

Einleitung.

In dieser Arbeit soll ein neuer Beweis für die von Hasse bewiesene explizite Reziprozitätsformel der l-ten Potenzreste im l-ten Kreiskörper k gegeben werden. Unter der Voraussetzung, daß die Größen α und β aus k kongruent 1 modulo λ^2 sind, gilt für den sogenannten Umkehrfaktor bzw. das Normenrestsymbol folgende explizite Formel[1]):

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = \zeta^{\sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^{-v} \log \alpha) \frac{1}{l} S(\zeta^{v} \log \beta)} = \zeta^{L(\alpha, \beta)}.$$

Hierbei bedeutet $S(\alpha)$ die Spur einer Größe α aus k, und die in der Formel auftretenden Logarithmen sind im Sinne der Henselschen λ-adischen Reihenentwicklungen zu verstehen. Die bisherigen Beweise stützen sich entweder auf die Kummerschen logarithmischen Differentialquotienten oder die Eisensteinschen Beziehungen zwischen den Basiseinheiten des l-ten Kreiskörpers[2]).

---

[1]) Diese Formel ist von Hasse in den folgenden Abhandlungen bewiesen: „Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste im Körper k_ζ der l-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von k_ζ“, Journ. f. Math. **154** (1925). „Zum expliziten Reziprozitätsgesetz“, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930).

[2]) Die Einführung der Kummerschen logarithmischen Differentialquotienten und eine mit ihnen gebildete explizite Formel ist in der Abhandlung von Kummer gegeben: „Allgemeine Reziprozitätsgesetze für beliebig hohe Potenzreste“, Berl. Akad. Berichte 1850; zusammenfassend ist über die Beweise zum Reziprozitätsgesetz referiert in Hasse: „Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper“; Teil II, Reziprozitätsgesetz, Jahresber. d. Math.-Ver., Ergänzungsband VI (1930), § 20 (im folgenden zitiert mit „Ber. II“).

Im folgenden wird dieses Gesetz lediglich durch Betrachtungen und Untersuchungen in dem λ-adisch erweiterten Kreiskörper k_λ und speziellen Erweiterungskörpern, die durch Adjunktion von l-ten Wurzeln aus Größen α des λ-adischen Kreiskörpers entstehen, bewiesen werden. Die Grundlage dieser Arbeit bildet eine von Hensel und Hasse gemeinsam verfaßte Abhandlung, in der die Frage beantwortet wird, wann eine Zahl β des λ-adischen Kreiskörpers k_λ Norm des relativ-zyklischen Oberkörpers $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ ist[3]). Es wird in jener Arbeit für jede Zahl β ein Kriterium angegeben, auf Grund dessen man entscheiden kann, ob β Norm oder Nichtnorm aus $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ ist. Die Untersuchungen werden mit Hilfe der von Hensel gefundenen multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen durch ein sogenanntes Basissystem geführt[4]). Von Hilbert ist das Reziprozitätsgesetz in einen Zusammenhang mit dem Normenrestsymbol gestellt worden[5]), so daß es zur Herleitung eines expliziten Ausdrucks genügt, eine Formel für das Hilbertsche Normenrestsymbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right)$ zu besitzen (Ber. II, § 12, S. 58).

Nach einem einleitenden Paragraphen (§ 1), in dem ich einige Hilfssätze beweise, werde ich zunächst eine Charakterisierung des Hilbertschen Normenrestsymbols $\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right)$ durch gewisse Eigenschaften geben (§ 2) und dann im Hauptteil dieser Arbeit (§ 3) die Identität dieses Symbols mit dem obigen Ausdruck $\zeta^{L(\alpha, \beta)}$ nachweisen.

§ 1.

Vorbereitende Hilfssätze.

Es sei l eine ungerade Primzahl; ich betrachte den Körper der rationalen l-adischen Zahlen und erweitere ihn mit einer primitiven l-ten Einheitswurzel ζ zu dem λ-adischen Kreiskörper k_λ. In k_λ ist dann $\lambda = 1 - \zeta$ eine Primzahl, und es gilt die Beziehung $l \equiv -\lambda^{l-1} \bmod l\lambda \sim \lambda^l$.

Ich werde jetzt die Spuren einiger Größen dieses Zahlkörpers berechnen:

$$\text{I. } S(\zeta^a) = \begin{cases} -1, & \text{falls } a \not\equiv 0 \bmod l \\ l-1, & \text{falls } a \equiv 0 \bmod l. \end{cases}$$

[3]) K. Hensel und H. Hasse: „Über die Normenreste eines relativ-zyklischen Körpers vom Primzahlgrad l nach einem Primteiler von l", Math. Annalen **90** (1923) (im folgenden zitiert mit „N. R.").

[4]) Grundlegend für diese Betrachtungsweise sind die folgenden Arbeiten von Hensel: „Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen", Math. Zeitschr. **2** (1918). „Die Exponentialdarstellung der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers für den Bereich eines Primdivisors", H. A. Schwarz-Festschrift, Berlin 1914. „Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers", Journ. f. Math. **146** (1916).

[5]) D. Hilbert, „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper", Jahresber. D. Math.-Ver. **4** (1897), Teil 5.

Es ist nämlich $S(\zeta^a) = \zeta^a + \zeta^{2a} + \ldots + \zeta^{(l-1)a}$ stets gleich -1, wenn $(a, l) = 1$ ist, und gleich $l-1$, falls a durch l teilbar ist.

II. $S(\lambda^a) \begin{cases} = l, \text{ falls } 1 \leqq a \leqq l-1 \\ \equiv 0 \bmod l^2, \text{ falls } a \geqq l. \end{cases}$

Im ersten Falle ist

$$S(\lambda^a) = S((1-\zeta)^a) = S\left(\sum_{\nu=0}^{a} (-1)^\nu \binom{a}{\nu} \zeta^\nu\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{a} (-1)^\nu \binom{a}{\nu} S(\zeta^\nu) = l - \sum_{\nu=0}^{a} (-1)^\nu \binom{a}{\nu} = l.$$

Im zweiten Falle erhalte ich:

$$S(\lambda^a) = S(-l\,\lambda^{a-l+1}\eta) = -l\,S(\lambda^{a-l+1}\eta),$$

wo η eine nach positiven Potenzen von λ fortschreitende Einseinheit ist. Da $a \geqq l$ ist, so ist $S(\lambda^{a-l+1}\eta)$ stets durch l teilbar, mithin wird $S(\lambda^a)$ kongruent Null modulo l^2.

III. $S(\zeta^v \lambda^a) = (-1)^{l-v}\binom{a}{l-v} l,$

falls $1 \leqq a \leqq l-1$ und $0 \leqq v \leqq l-1$ ist.

Es ist

$$S(\zeta^v \lambda^a) = S(\zeta^v (1-\zeta)^a)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{l-1} \zeta^{\mu v} (1-\zeta^\mu)^a = \sum_{\mu=0}^{l-1} \sum_{\nu=0}^{a} (-1)^\nu \binom{a}{\nu} \zeta^{\mu(v+\nu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{a} (-1)^\nu \binom{a}{\nu} \sum_{\mu=0}^{l-1} \zeta^{\mu(v+\nu)}$$

$$= l \sum_{v+\nu \equiv 0 \bmod l} (-1)^\nu \binom{a}{\nu}.$$

Wegen der obigen Einschränkungen für v und a reduziert sich diese Summe über ν auf das einzige Glied $(-1)^{l-v}\binom{a}{l-v}$; somit ist also

$$S(\zeta^v \lambda^a) = (-1)^{l-v}\binom{a}{l-v} l.$$

IV. $S(\zeta^v \lambda_l) \equiv 0 \bmod l^2$, wenn $\lambda_l \equiv 0 \bmod \lambda^l$ ist.

Es ist

$$S(\zeta^v \lambda_l) = S(-l\,\zeta^v \lambda_1) = -l\,S(\zeta^v \lambda_1),$$

wo $\lambda_1 \equiv 0$ mindestens modulo λ ist. Aus diesem Grunde ist der Ausdruck stets durch l^2 teilbar.

Auf Grund dieser Überlegungen kann jetzt der folgende **Hilfssatz I** auf einfache Weise bewiesen werden:

Es ist der Ausdruck

$$L(a,b) = \sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^v \lambda^b) \frac{1}{l} S(\zeta^{l-v} \lambda^a) \equiv \begin{cases} 0 \\ b \end{cases} \bmod l,$$

je nachdem $l - b \neq a$ *oder* $l - b = a$ *ist.* ($a, b \geqq 1$ *beliebig*).

Beweis. Es seien a und $b \leqq l-1$, dann ist nach III

$$L(a,b) = -\sum_{v=1}^{l-1} v \binom{b}{l-v} \binom{a}{v}.$$

Hier kann ich die Summierung über v auch von $-\infty$ bis $+\infty$ vornehmen, d. h.

$$L(a,b) = -\sum_{v=-\infty}^{+\infty} v \binom{b}{l-v} \binom{a}{v}$$

$$= -\sum_{v=-\infty}^{+\infty} a \binom{b}{l-v} \binom{a-1}{v-1}$$

$$= -a \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \binom{b}{l-v} \binom{a-1}{v-1}.$$

Unter Anwendung der bekannten Formel über Binomialkoeffizienten

$$\sum_{\mu+\nu=k} \binom{\alpha}{\mu} \binom{\beta}{\nu} = \binom{\alpha+\beta}{k}$$

auf den Ausdruck $L(a,b)$ erhalte ich:

$$L(a,b) = -a \binom{b+a-1}{l-1}.$$

Ist $b + a < l$, so wird $L(a,b) = 0$; ist $b + a = l$, so wird $L(a,b) = -a \equiv b \bmod l$, und ist schließlich $b + a > l$, so wird $L(a,b) \equiv 0 \bmod l$; da nämlich $l < a + b \leqq 2l - 2$ ist, so ist der Binomialkoeffizient $\binom{b+a-1}{l-1}$ stets durch l teilbar, weil sein Nenner prim zu l ist, während sein Zähler $(a+b-1)\ldots(a+b-(l-1))$ sicher den Faktor l enthält.

Ist ferner a oder $b \geqq l$, so folgt aus IV unmittelbar $L(a,b) \equiv 0 \bmod l$. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Der weiter zu beweisende **Hilfssatz II** liefert eine Einsicht in die Teilbarkeitseigenschaften einer Summe von Binomialkoeffizienten. Er lautet:

$$S_{a,i} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i+n}{i} \binom{al+b}{(i+n)l+k} \equiv 0 \bmod l^{a-i}$$

für beliebige ganze $a \geqq 0$, $i \geqq 0$ *und* $0 \leqq b \leqq l-1$, $0 \leqq k \leqq l-1$.

Der *Beweis* wird durch einen vollständigen Induktionsschluß geführt. Für $a = 0$ und $i \neq 0$ wird stets $S_{0,\,i} = 0$; für den Fall $a = 0$ und $i = 0$ ergibt sich:

$$S_{0,\,0} = \binom{0}{0}\binom{b}{k}.$$

Dieser Wert ist auch stets kongruent Null mod l^{0-0}. Somit ist die Gültigkeit für $a = 0$ und alle Werte von i gezeigt. Ich mache jetzt die Induktionsannahme, daß der Satz für $a-1$ und für alle zugelassenen i, b und k gelte und folgere daraus die Gültigkeit auch für a und alle zugelassenen i, b und k.

Es ist

$$S_{a,\,i} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i+n}{i}\binom{al+b}{(i+n)\,l+k}.$$

Wende ich die schon bei dem Beweis des vorigen Hilfssatzes benutzte Formel

$$\sum_{\mu+\nu=\varkappa} \binom{\alpha}{\mu}\binom{\beta}{\nu} = \binom{\alpha+\beta}{\varkappa}$$

auf den Ausdruck $\binom{al+b}{(i+n)\,l+k}$ an, so erhalte ich:

$$S_{a,\,i} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i+n}{i} \sum_{r=0}^{l} \binom{l}{r}\binom{(a-1)\,l+b}{(i+n)\,l+k-r}.$$

Durch Abspaltung der Randglieder der Summe über r ergibt sich:

$$S_{a,\,i} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i+n}{i}\left[\binom{(a-1)\,l+b}{(i+n)\,l+k} + \binom{(a-1)\,l+b}{(i+n-1)\,l+k}\right]$$
$$+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i+n}{i} \sum_{r=1}^{l-1} \binom{l}{r}\binom{(a-1)\,l+b}{(i+n)\,l+k-r}.$$

Für die erste Summe T erhalte ich:

$$T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{i+n-1}{i}\binom{(a-1)\,l+b}{(i+n-1)\,l+k}$$
$$+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i+n}{i}\binom{(a-1)\,l+b}{(i+n-1)\,l+k}.$$

Berücksichtige ich, daß

$$\binom{i+n}{i} - \binom{i+n-1}{i} = \binom{i-1+n}{i-1}$$

ist, so folgt:

$$T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i-1+n}{i-1}\binom{(a-1)\,l+b}{(i-1+n)\,l+k} = S_{a-1,\,i-1}.$$

Nach der Induktionsannahme ist also $T \equiv 0 \bmod l^{(a-1)-(i-1)} = l^{a-i}$. Mithin ist jetzt

$$S_{a,i} \equiv \sum_{r=1}^{l-1} \binom{l}{r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i+n}{i} \binom{(a-1)\,l+b}{(i+n)\,l+k-r} \bmod l^{a-i}.$$

Für alle $r \leqq k$ stellen die obigen Summen über n den Ausdruck $S_{a-1,i}$ dar, sind also kongruent Null mod l^{a-i-1}; da $\binom{l}{r}$ in diesen Fällen stets durch l teilbar ist, so erhalte ich:

$$\begin{aligned} S_{a,i} &\equiv \sum_{r>k}^{l-1} \binom{l}{r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i+n}{i} \binom{(a-1)\,l+b}{(i+n-1)\,l+l+k-r} \bmod l^{a-i} \\ &\equiv \sum_{r>k}^{l-1} \binom{l}{r} \Big[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \binom{i-1+n}{i-1} \binom{(a-1)\,l+b}{(i-1+n)\,l+l+k-r} \\ &\qquad - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{i+n-1}{i} \binom{(a-1)\,l+b}{(i+n-1)\,l+l+k-r} \Big] \\ &\equiv \sum_{r>k}^{l-1} \binom{l}{r} [S_{a-1,i-1} - S_{a-1,i}] \equiv 0 \bmod l^{a-i}. \end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

§ 2.

Das Normenrestsymbol für λ.

In der Klassenkörpertheorie (Ber. II, § 12, I, II) wird bewiesen, daß der Umkehrfaktor des Symbols der l-ten Potenzreste, der aus dem Quotienten der beiden zueinander inversen l-ten Potenzrestsymbole, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$, besteht, wobei α, β prim zu l und zueinander aus dem l-ten Kreiskörper k gewählt sein sollen, nur von dem Restklassenverhalten der Werte α und β nach einer hinreichend hohen Potenz des Primteilers λ von l als Modul — nämlich mod λ^l — abhängt. Die bestehende Beziehung lautet:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right),$$

wo auf der rechten Seite das sogenannte Normenrestsymbol für λ steht. Dieses Normenrestsymbol ist allgemein für beliebige α, β aus k_λ definiert und besitzt die folgenden Eigenschaften:

I. $\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right)$ ist eine l-te Einheitswurzel, und es ist

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = 1$$

dann und nur dann, wenn die Zahl β aus k_λ Relativnorm $n(B)$ einer Zahl B aus dem Körper $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ ist, der durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\alpha}$ zu k_λ entsteht.

Dieser Körper $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ ist k_λ selbst dann und nur dann, wenn $\alpha = \alpha^{*l}$ in k_λ ist; hierzu reicht bekanntlich schon hin, daß nur $\alpha \equiv \alpha_0^l \bmod \lambda^{l+1}$ ist. Dann ist trivialerweise jedes β Norm aus $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha}) = k_\lambda$; speziell gilt also:

(1) $$\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = 1, \text{ wenn } \alpha \equiv \alpha_0^l \bmod \lambda^{l+1},$$

insbesondere, wenn $\alpha \equiv 1 \bmod \lambda^{l+1}$. Anderenfalls ist $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ vom Grade l über k_λ und besitzt einen Primteiler Λ von der Relativordnung 1 oder l und bzw. dem Relativgrad l oder 1, so daß also $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ ein Henselscher Körper K_Λ wird.

II. $$\left(\frac{\beta_1 \beta_2, \alpha}{\lambda}\right) = \left(\frac{\beta_1, \alpha}{\lambda}\right)\left(\frac{\beta_2, \alpha}{\lambda}\right)$$ (vorderer Zerlegungssatz).

III. $$\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = \left(\frac{\alpha, \beta}{\lambda}\right)^{-1}$$ (Vertauschungssatz).

IV. Speziell ist $$\left(\frac{1+l, \zeta}{\lambda}\right) = \zeta^{\frac{N(1+l)-1}{l}} = \zeta^{-1}.$$

Aus II, III folgt natürlich auch noch:

II′. $$\left(\frac{\beta, \alpha_1 \alpha_2}{\lambda}\right) = \left(\frac{\beta, \alpha_1}{\lambda}\right)\left(\frac{\beta, \alpha_2}{\lambda}\right)$$ (hinterer Zerlegungssatz).

Ferner folgt aus (1) und III noch:

(1′) $$\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = 1 \quad \text{für } \beta \equiv 1 \bmod \lambda^{l+1}.$$

Wie sich aus früheren Arbeiten von Hasse[6]) ergibt, ist das Normenrestsymbol durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt. Es handelt sich jetzt darum, diese Festlegung über die rein theoretische Erkenntnis ihrer Eindeutigkeit hinaus explizit zu verfolgen; und zwar mit Methoden, die ganz im Henselschen Körper k_λ und seinen Erweiterungen $K_\Lambda = k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ verlaufen.

Zunächst ist aus I—III und (1), (1′) zu ersehen, daß es genügt, die Werte $\left(\frac{\eta_h, \eta_i'}{\lambda}\right)$ zu bestimmen, wo η_h und η_i' je ein (nicht notwendig dasselbe) Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung mod λ^{l+1} in k_λ durchlaufen. Für die Auswahl dieses Fundamentalsystems berufe ich mich nun

[6]) H. Hasse, „Zur Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern", Journ. f. Math. **153** (1924). „Direkter Beweis des Zerlegungs- und Vertauschungsgesetzes für das Hilbertsche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper im Falle eines Primteilers I des Relativgrades l", Journ. f. Math. **154** (1925).

auf den folgenden in einer früheren Arbeit (N. R.) von Hensel-Hasse bewiesenen **Satz:**

Zu jeder der Fundamentaleinheiten $\alpha = \eta_h = 1 - \lambda^h$ *mit* $h = 1, 2, \ldots, l$ *existiert ein bestimmtes Fundamentalsystem* $\lambda^{(\alpha)}, \eta_1^{(\alpha)}, \ldots, \eta_{l-1}^{(\alpha)}, \eta_l^{(\alpha)}$ *derart, daß eine Zahl aus* k_λ *dann und nur dann Norm aus* $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ *ist, wenn sie im Falle* $\alpha = 1 - \lambda^h$ *mit* $h = 1, 2, \ldots, l-1$ *eine gewisse der Einseinheiten* $\eta_1^{(\alpha)}, \ldots, \eta_{l-1}^{(\alpha)}$ *von der Form* $\eta_{h'}^{(\alpha)} = 1 - \lambda^{h'} = \eta_{h'}$ *mit* $h + h' = l$, *im Falle* $\alpha = 1 - \lambda^l$ *das Element* $\lambda^{(\alpha)} = \lambda$ *nicht oder nur in der* l*-ten Potenz enthält*[7]*; anders gesagt: das Fundamentalsystem ist so bestimmt, daß sämtliche Elemente mit Ausnahme eines einzigen Normen aus* $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ *sind.*

Ich beschränke mich auf zu λ prime α, β. Dann gilt nach diesem Satze genauer als (1), (1′):

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = 1 \quad \text{für } \alpha \equiv 1 \mod \lambda^l \tag{2}$$

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = 1 \quad \text{für } \beta \equiv 1 \mod \lambda^l, \tag{2'}$$

was ich im folgenden dauernd brauchen werde. Ich brauche mich daher für α, β nur um die Fundamentaleinheiten bis zum Grade $l-1$ zu kümmern.

Ferner gilt nach jenem Satze, wenn $\alpha = \eta_h$ $(h = 1, \ldots, l-1)$ gesetzt wird, und $\eta_1^{(h)}, \ldots, \eta_{l-1}^{(h)}$ das zugehörige Fundamentalsystem bedeutet:

$$\left(\frac{\eta_i^{(h)}, \eta_h}{\lambda}\right) = 1 \text{ für } i \neq h'. \tag{3}$$

Dagegen ist sicher

$$\left(\frac{\eta_{h'}^{(h)}, \eta_h}{\lambda}\right) = \left(\frac{\eta_{h'}, \eta_h}{\lambda}\right) = 1.$$

Diesen Wert berechne ich schließlich zu:

$$\left(\frac{\eta_{h'}, \eta_h}{\lambda}\right) = \zeta^{h'}. \tag{4}$$

Beweis. 1. Ist $h = l-1$, so ist

$$\left(\frac{\zeta, \eta_{l-1}}{\lambda}\right) = \left(\frac{\zeta, 1+l}{\lambda}\right) = \zeta^1$$

nach (1), II, III, IV.

2. Ist $l-1 > l > \frac{l}{2}$, so gelingt mir der Nachweis von (4) mit Hilfe eines von Takagi[8]) bewiesenen **Hilfssatzes:**

[7]) Der in N. R. auftretende dritte Fall $\alpha = \lambda$ fällt hier fort, da der Umkehrfaktor nur für Werte von α und β definiert ist, die prim zu λ sind.

[8]) Teiji Takagi, „Zur Theorie des Kreiskörpers", Journ. f. Math. **157** (1926), S. 231.

Ist $\alpha = 1 - \lambda_1$, *wo* λ_1 *eine genau durch die erste Potenz von* λ *teilbare Zahl aus* k_λ *ist, und* h *eine ganze rationale Zahl ist mit* $l > h > \frac{l}{2}$, *dann ist* $1 - l - \lambda_1^h$ *Norm aus dem Körper* $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$.

Der *Beweis* dieses Satzes sei hier kurz skizziert. Es ist $\Lambda = 1 - \sqrt[l]{\alpha}$ genau durch die erste Potenz des Primteilers von λ in $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ teilbar. Takagi bildet die Relativnorm der Größe $1 - \Lambda^h$. Es ist

$$n\,(1 - \Lambda^h) = 1 - S_1(\Lambda^h) + S_2(\Lambda^h) - \ldots + S_{l-1}(\Lambda^h) - n(\Lambda^h).$$

Hierbei bedeuten $S_1, \ldots, S_{l-1}$ die elementarsymmetrischen Funktionen der l mit Λ^h relativ konjugierten Zahlen $\Lambda^h, \Lambda'^h, \ldots, (\Lambda^{(l-1)})^h$. Es ist $S_1(\Lambda^h) = s(\Lambda^h)$ die Relativspur von Λ^h. Wegen $h < l$ gilt:

$$\begin{aligned} s(\Lambda^h) &= s\left((1 - \sqrt[l]{\alpha})^h\right) \\ &= s\left(\sum_{\nu=0}^{h} (-1)^\nu \binom{h}{\nu} (\sqrt[l]{\alpha})^\nu\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{h} (-1)^\nu \binom{h}{\nu} s\left((\sqrt[l]{\alpha})^\nu\right) = l. \end{aligned}$$

Weiterhin läßt sich

$$S_2(\Lambda^h) = \Lambda^h \Lambda'^h + \ldots + (\Lambda^{(l-2)})^h (\Lambda^{(l-1)})^h$$

in $\frac{l-1}{2}$ Teilsummen zerlegen, deren jede Relativspur einer genau durch Λ^{2h} teilbaren Zahl ist, also wegen $k > \frac{l}{2}$ einer Zahl der Form λA mit durch Λ teilbarem A. Also ist

$$S_2(\Lambda^h) = \sum s(\Lambda^h \Lambda'^h) = \sum s(\lambda A) = \sum \lambda\, s(A).$$

Nach den obigen Ausführungen zur Größe S_1 ist aber $s(A) \equiv 0 \bmod l$; daher wird $S_2(\Lambda^h) \equiv 0 \bmod l\lambda \sim \lambda^l$. Analoges gilt für die Größen $S_3, \ldots, S_{l-1}$. Beachtet man noch, daß $n(\Lambda^h) = \lambda_1^h$ ist, so wird

$$n\,(1 - \Lambda^h) \equiv 1 - l - \lambda_1^h \bmod \lambda^l.$$

Damit ist der Takagische Hilfssatz bewiesen.

Unter der Voraussetzung $l - 1 > h > \frac{l}{2}$ setze ich jetzt speziell:

$$\alpha = 1 - \lambda_1 = 1 - \lambda - \lambda^{h'} + \lambda^{h'+1} = (1 - \lambda)(1 - \lambda^{h'}) = \zeta \eta_{h'}$$

mit $h + h' = l$. Dann ist

$$\lambda_1 = \lambda(1 + \lambda^{h'-1} - \lambda^{h'}) \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \lambda_1^h &\equiv \lambda^h (1 + h\,\lambda^{h'-1}) \bmod \lambda^{h'+h} \\ &\equiv \lambda^h + h\,\lambda^{h+h'-1} \\ &\equiv \lambda^h - h\,l \bmod \lambda^l. \end{aligned}$$

Somit wird

$$1 - \lambda_1^h - l \equiv 1 - \lambda^h + hl - l \mod \lambda^l$$

einerseits kongruent

$$(1 - l - \lambda^h)(1 + hl) \mod \lambda^l$$

und andererseits kongruent

$$(1 - \lambda^h)\gamma \equiv \eta_h \gamma \mod \lambda^l,$$

wo γ eine Einseinheit von einem Grade $k > h$ bedeutet. Also ist

$$\left(\frac{1 - l - \lambda_1^h, 1 - \lambda_1}{\lambda}\right) = 1 = \left(\frac{1 - l - \lambda_1^h, \zeta \eta_{h'}}{\lambda}\right)$$

$$= \left(\frac{(1 - l - \lambda^h)(1 + hl), \zeta}{\lambda}\right)\left(\frac{\eta_h \gamma, \eta_{h'}}{\lambda}\right) \text{ nach II, II', (2')}$$

$$= \left(\frac{1 + hl, \zeta}{\lambda}\right)\left(\frac{\eta_h, \eta_{h'}}{\lambda}\right) \qquad \text{nach II,}$$

und da ferner nach dem Takagischen Hilfssatz speziell $\left(\frac{1 - l - \lambda^h, 1 - \lambda}{\lambda}\right) = 1$ ist und nach N. R. γ stets Norm aus $k_\lambda(\sqrt[l]{\eta_{h'}})$ ist, da der Grad k der Einseinheit γ größer als h, der kritische Grad, ist. Mithin wird nach II:

$$1 = \left(\frac{1 + l, \zeta}{\lambda}\right)^h \left(\frac{\eta_h, \eta_{h'}}{\lambda}\right),$$

und nach III und IV wird dann:

$$\left(\frac{\eta_{h'}, \eta_h}{\lambda}\right) = \zeta^{h'}.$$

3. Ist $h < \frac{l}{2}$, so folgt aus dem vorigen und III:

$$\left(\frac{\eta_h, \eta_{h'}}{\lambda}\right)^{-1} = \left(\frac{\eta_{h'}, \eta_h}{\lambda}\right) = \zeta^{h'}.$$

Damit ist (4) vollständig bewiesen.

§ 3.

Beweis für die explizite Reziprozitätsformel.

Zum Beweis der expliziten Reziprozitätsformel

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = \zeta^{\sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^{-v} \log \alpha) \frac{1}{l} S(\zeta^v \log \beta)} = \zeta^{L(\alpha, \beta)}$$

ist es notwendig, die Identität des Normenrestsymbols mit dem Ausdruck $\zeta^{L(\alpha, \beta)}$ zu zeigen. Dieser Nachweis soll jetzt erbracht werden.

Zunächst ist zu bemerken, daß die obige Formel unter der Voraussetzung gilt, daß die Größen α und β aus k_λ kongruent 1 mod λ^2 sind. Dies bedeutet aber keine wesentliche Einschränkung, denn durch Multiplikation mit einer Potenz der l-ten Einheitswurzel ζ ist stets zu erreichen, daß α und β

kongruent 1 mod λ^2 werden. Die Veränderung der Potenzrestsymbole, die bei der Multiplikation von α und β mit einer Potenz der l-ten Einheitswurzel ζ eintritt, kann auf Grund des Eulerschen Kriteriums sofort angegeben werden.

Das im vorigen Paragraphen explizit bestimmte Normenrestsymbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right)$ für zu λ primes α, β ist nun ersichtlich durch die folgenden Eigenschaften eindeutig charakterisiert:

1. Es gilt der vordere Zerlegungssatz und der Vertauschungssatz.

2. Es ist $\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = 1$, sobald $\beta \equiv 1 \bmod \lambda^l$ ist.

3. Es ist $\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = 1$, falls $\alpha = 1 - \lambda^h$ mit $h = 1, 2, \ldots, l-1$ und β Relativnorm aus $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ ist.

4. Es ist $\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) = \zeta^{h'}$, falls $\alpha = 1 - \lambda^h$ mit $h = 1, 2, \ldots, l-1$ und $\beta = 1 - \lambda^{h'}$ mit $h + h' = l$ ist.

Das erkennt man leicht, wenn man das allgemeine Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right)$ vermittelst der im vorigen Paragraphen angeführten Fundamentalsysteme auf die dort in (2)—(4) bestimmten speziellen Symbole zurückführt.

Zum Nachweis der Identität der beiden Größen

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad \zeta^{L(\alpha, \beta)}$$

sind also die folgenden vier entsprechenden Eigenschaften von $\zeta^{L(\alpha, \beta)}$ festzustellen:

1. Für $\zeta^{L(\alpha, \beta)}$ gelten die Gleichungen:

$$\zeta^{L(\alpha, \beta_1 \beta_2)} = \zeta^{L(\alpha, \beta_1) + L(\alpha, \beta_2)} \quad \text{und} \quad \zeta^{L(\alpha, \beta)} = \zeta^{-L(\beta, \alpha)}$$

oder also die Kongruenzen:

$$L(\alpha, \beta_1 \beta_2) \equiv L(\alpha, \beta_1) + L(\alpha, \beta_2) \bmod l$$
$$L(\alpha, \beta) \equiv -L(\beta, \alpha) \bmod l.$$

2. Es ist $\zeta^{L(\alpha, \beta)} = 1$, d. h. $L(\alpha, \beta) \equiv 0 \bmod l$, sobald $\beta \equiv 1 \bmod \lambda^l$ ist.

3. Es ist $\zeta^{L(\alpha, \beta)} = 1$, d. h. $L(\alpha, \beta) \equiv 0 \bmod l$, falls $\alpha = 1 - \lambda^h$ mit $h = 2, 3, \ldots, l-1$ und β Relativnorm aus $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ ist.

4. Es ist $\zeta^{L(\alpha, \beta)} = \zeta^{h'}$, d. h. $L(\alpha, \beta) \equiv h' \bmod l$, falls $\alpha = 1 - \lambda^h$ und $\beta = 1 - \lambda^{h'}$ mit $h = 2, 3, \ldots, l-1$ und $h + h' = l$ ist.

Zu 1. Aus der Funktionalgleichung des Logarithmus

$$\log a \cdot b = \log a + \log b$$

und der bekannten Eigenschaft der Spur, daß die Spur einer Summe gleich der Summe der Spuren ist, folgt, daß

$$L(\alpha, \beta_1 \beta_2) = \sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^{-v} \log \alpha) \frac{1}{l} S(\zeta^v \log \beta_1 \beta_2)$$

$$= \sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^{-v} \log \alpha) \frac{1}{l} [S(\zeta^v \log \beta_1) + S(\zeta^v \log \beta_2)]$$

$$= L(\alpha, \beta_1) + L(\alpha, \beta_2) \text{ ist.}$$

Ersetze ich ferner in $L(\alpha, \beta)$ die Summationsgröße v durch $-v$, so erhalte ich weiterhin:

$$L(\alpha, \beta) = \sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^{-v} \log \alpha) \frac{1}{l} S(\zeta^v \log \beta)$$

$$= -\sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^v \log \alpha) \frac{1}{l} S(\zeta^{-v} \log \beta) = -L(\beta, \alpha).$$

Damit sind die Behauptungen 1. erwiesen.

Zu 2. Es sei $\beta \equiv 1 \bmod \lambda^l$, dann ist

$$L(\alpha, \beta) = \sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^v \lambda^l \eta) \frac{1}{l} S(\zeta^{-v} \log \alpha).$$

Hier bedeutet η eine nach positiven Potenzen von λ fortschreitende Einseinheit; β ist nämlich eine Exponentialeinheit[9]), und nach einem von Hensel bewiesenen Satze (Ber. II, § 18) ist die Ordnung von $\beta - 1$ in λ gleich der Ordnung von $\log \beta$. Nach Hilfssatz I (S. 236) ist $L(\alpha, \beta) \equiv 0 \bmod l$, da $\log \alpha$ mindestens durch λ^2 teilbar ist.

Zu 3. Es ist für jede Größe $\alpha = 1 - \lambda^h$ mit $h = 2, 3, \ldots, l-1$ zu zeigen, daß $L(\alpha, \beta) \equiv 0 \bmod l$ wird, wenn β einer Relativnorm aus dem Oberkörper $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ gleichgesetzt wird. An diesem Punkte meiner Untersuchungen werden die Ergebnisse der Arbeit N. R. wesentlich benutzt und weitergeführt. Es handelt sich hier um den in N. R. unter c) angeführten Fall. Gemäß 1. und 2. genügt es, 3. für ein Basiseinheitensystem an der Stelle von β zu zeigen. Ich wähle dazu das in dem Hasse-Henselschen Satze (S. 240) genannte, in N. R. näher bestimmte Basissystem, das so ausgewählt ist, daß alle Einseinheiten der Grade $1, 2, \ldots, l-1$ mit Ausnahme der Einheit $\eta_{h'}^{(h)} = 1 - \lambda^{h'}$ vom Grade $h' = l - h$ Relativnormen von $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ in bezug auf k_λ sind. Für β sind dann nur die Einseinheiten der Grade

[9]) Im l-ten Kreiskörper sind alle Einheiten $\eta_i \equiv 1 \bmod \lambda^i$ mit $i > \frac{e}{l-1} = \frac{l-1}{l-1}$, d. h. $i \geqq 2$ Exponentialeinheiten.

$2, 3, \ldots, l-1$ ausschließlich h' dieses Systems zu setzen, d. h. gemäß N. R. das System der Einheiten

$$\eta_{s,t} = n(H_{s,t}),$$

wo $H_{s,t}$ die Größe

$$H_{s,t} = 1 - \lambda^s (1 - \sqrt[l]{\alpha})^t$$

aus $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ ist, und ferner t und s solche Werte der Reihen

$$1, 2, \ldots, l-1 \quad \text{und} \quad -\left[\frac{lt}{l}\right], \ldots, l-1-\left[\frac{lt}{l}\right]$$

durchlaufen, daß je eine Basiseinheit der Grade $2, 3, \ldots, l-1$ mit Ausnahme des Grades h' entsteht.

Es ist jetzt β diesen Basisgrößen $n(H_{s,t})$ nacheinander gleichzusetzen und jeweils der Kongruenzwert von $L(\alpha, \beta)$ modulo l zu bilden. Dazu ist es unerläßlich, von β bzw. $\log\beta$ die λ-adischen Näherungswerte bis zur Ordnung h' in λ festzustellen. Zu diesem Zwecke müssen jetzt einige über den Rahmen der Arbeit N. R. hinausgehende Eigenschaften von $\log\beta$ aufgezeigt werden. Es sei $\beta = n(H_{s,t})$, dann ist

$$\log\beta = \log n(H_{s,t}) = s(\log H_{s,t})$$

auf Grund der Tatsache, daß der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren ist; $s(A)$ bedeutet die Relativspur einer Größe A aus $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ in bezug auf k_λ. Da $H_{s,t} = 1 - \lambda^s(1 - \sqrt[l]{\alpha})^t$ ist, so wird

$$\log H_{s,t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\lambda^{ns}}{n} (1 - \sqrt[l]{\alpha})^{nt}.$$

Zur Relativspurbildung von $\log H_{s,t}$ ist es notwendig, die Spur des Ausdrucks $(1 - \sqrt[l]{\alpha})^{nt}$ zu berechnen, denn

$$s(\log H_{s,t}) = s\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\lambda^{ns}}{n} (1 - \sqrt[l]{\alpha})^{nt}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\lambda^{ns}}{n} s((1 - \sqrt[l]{\alpha})^{nt}).$$

Es ist nun

$$s((1 - \sqrt[l]{\alpha})^{nt}) = \sum_{r=1}^{l} (1 - \sqrt[l]{\alpha}\zeta^r)^{nt}$$

$$= \sum_{r=1}^{l} \sum_{k=0}^{nt} (-1)^k \binom{nt}{k} (\sqrt[l]{\alpha}\zeta^r)^k.$$

Führe ich die Summierung über r aus und berücksichtige, daß $\sum_{r=1}^{l} \zeta^{r\,m} = 0$ ist, wenn m und l relativ prim zueinander sind, so erhalte ich:

$$s\left((1-\sqrt[l]{\alpha})^{nt}\right) = l\left[1-\binom{nt}{l}\alpha+\binom{nt}{2\,l}\alpha^2-\ldots(-1)^{a_n}\binom{nt}{a_n\,l}\alpha^{a_n}\right]$$

$$= l\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{nt}{i\,l}\alpha^i,$$

wenn $nt = a_n l + b_n$ mit $0 \leqq b_n \leqq l-1$ ist. Setze ich in dieser Gleichung jetzt noch den Wert

$$\alpha^i = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}\lambda^{k\,h}$$

ein, so erhalte ich:

$$s\left((1-\sqrt[l]{\alpha})^{nt}\right) = l\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{nt}{i\,l}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{i}{k}\lambda^{k\,h}$$

$$= l\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k\,h}\sum_{i\geqq k}^{\infty}(-1)^{i+k}\binom{nt}{i\,l}\binom{i}{k}.$$

Ich setze $i = k+m$ und erhalte:

$$s\left((1-\sqrt[l]{\alpha})^{nt}\right) = l\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k\,h}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{nt}{(k+m)\,l}\binom{k+m}{k}$$

$$= l\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k\,h}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\binom{nt}{(k+m)\,l}\binom{k+m}{k}.$$

Nach Hilfssatz II (S. 236) ist die Summe über m kongruent Null modulo l^{a_n-k}. Da $h<l$ ist, so lautet das Glied niedrigster Ordnung in λ der Größe $s\left((1-\sqrt[l]{\alpha})^{nt}\right)$:

$$l\,\lambda^{a_n h}\binom{a_n l+b_n}{a_n\,l}\binom{a_n}{a_n} = l\,\lambda^{a_n h}\binom{a_n l+b_n}{b_n}.$$

Das nächste höhere Glied in λ ist von der Form:

$$l\,\lambda^{(a_n-1)h}\left[\binom{nt}{(a_n-1)\,l}-\binom{nt}{a_n\,l}a_n\right] = l^2\,\lambda^{(a_n-1)h}E,$$

wobei E eine ganze rationale Zahl bedeutet; die Ordnung dieses Gliedes in λ ist also mindestens

$$2\,(l-1)+h\,(a_n-1).$$

Daß alle weiteren Glieder von gleicher oder höherer Ordnung in λ sind, folgt allein aus der Tatsache, daß h kleiner als l ist. Nimmt nämlich die Summationsgröße k der ersten Summe von k auf $k-1$ ab, so nimmt die Ordnung des ersten Faktors $\lambda^{k\,h}$ in bezug auf λ um h ab, während gleichzeitig die Ordnung des zweiten Faktors, der Summe über m, mindestens um die Größe $l-1$ zunimmt, so daß also beim Abnehmen der Werte von k niemals eine Er-

niedrigung der Ordnung von λ bei der Relativspur von $(1-\sqrt[l]{\alpha})^{nt}$ eintritt. Nach diesen Überlegungen ergibt sich jetzt:

$$s\left((1-\sqrt[l]{\alpha})^{nt}\right) \equiv \binom{a_n l + b_n}{b_n} l\,\lambda^{a_n h}$$
$$\equiv l\,\lambda^{a_n h} \mod l^2\,\lambda^{(a_n-1)h}.$$

Kehren wir jetzt zur Betrachtung des Logarithmus von $H_{s,t}$ zurück, so ist zwar für jeden Summanden der unendlichen Reihe ein Näherungswert nach einem gegebenen Modul gefunden, aber dieser Modul $l^2\lambda^{(a_n-1)h}$ ist nicht für jeden Wert von n fest vorgegeben, sondern ist, wie man durch die in ihm auftretende Größe a_n schon äußerlich erkennt $\left(a_n = \frac{nt-b_n}{l} = \left[\frac{nt}{l}\right]\right)$ von der Zahl n abhängig.

Es sei nun $n = rl^b$ mit $(r, l) = 1$ und $b = 0, 1, \ldots$, dann lautet die Abschätzung für den n-ten Summanden in dem Ausdruck $s(\log H_{s,t})$:

$$\frac{\lambda^{ns}}{n}\, s\left((1-\sqrt[l]{\alpha})^{nt}\right) \equiv \frac{\lambda^{ns}}{r}\, l^{1-b}\,\lambda^{a_n h} \mod l^{2-b}\,\lambda^{a_n h - h + ns}.$$

Ich zeige jetzt, daß die Abschätzung der Relativspuren nach einem Modul erfolgt ist, der für unsere Zwecke genügend hoch ist. Dazu muß bewiesen werden, daß für alle Werte von n der Modul $l^{2-b}\lambda^{a_n h - h + ns}$ durch die $l - h + 1 = h' + 1$-te oder eine höhere Potenz von λ ersetzt werden kann. Dieser Nachweis ist insbesondere im Hinblick auf die Tatsache, daß s auch negative Werte bis zur Größe $-\left[\frac{ht}{l}\right]$ durchlaufen kann, zu erbringen. Es ist also jetzt die Ungleichung

$$x = (2-b)(l-1) + a_n h - h + ns \geqq h' + 1$$

für jeden Wert von n zu erweisen.

Es ist $nt = a_n l + b_n$ mit $b_n < l$. Die Größe $ht + ls = \varrho$ gibt die Ordnung der Einseinheit $\eta_{ls\ t} = n(H_{s,t})$ in λ an (N. R. S. 271). Nach den gemachten Voraussetzungen über β ist daher $ht + ls = \varrho \geqq 2$. Aus diesen Angaben folgt:

$$ls = \varrho - ht \quad \text{und} \quad ns = \frac{\varrho n}{l} - \frac{htn}{l};$$

ferner ist

$$a_n = \frac{nt - b_n}{l} \quad \text{und} \quad a_n h = \frac{nth - b_n h}{l}.$$

Es wird also

$$x = (2-b)(l-1) - h + \frac{\varrho n}{l} - \frac{b_n h}{l}.$$

In den verschiedenen zu unterscheidenden Fällen ergeben sich für den Exponenten des Moduls folgende Werte:

1. Ist $b = 0$, so wird:

$$x = 2(l-1) - h + \frac{\varrho n}{l} - \frac{b_n h}{l}.$$

Falls $h < l-1$, also $h' > 1$ ist, gilt wegen $\frac{b_n h}{l} < h$:

$$x > 2h' - 2 + \frac{\varrho n}{l}, \quad \text{also} \quad x \geqq 2h' - 1, \quad \text{d. h.} \quad x \geqq h' + 1.$$

Falls $h = l-1$ und $h' = 1$ ist, wird

$$x = l - 1 + \frac{\varrho n}{l} - b_n + \frac{b_n}{l} = l - 1 - b_n + \frac{\varrho n + b_n}{l}.$$

Für jeden Wert von $b_n = 0, 1, \ldots, l-1$ wird

$$x > 1, \quad \text{also} \quad x \geqq 2 = h' + 1.$$

2. Ist $b = 1$, so wird $x = l - 1 - h + r\varrho \geqq h' + 1$, da in diesem Falle $a_n = rt$ und $b_n = 0$ ist.

3. Ist $b \geqq 2$, so wird $a_n = rl^{b-1}$ und $b_n = 0$; daher erhalte ich:

$$x = (2-b)(l-1) - h + r\varrho l^{b-1} = l(2 - b + r\varrho l^{b-2}) - h - 2 + b$$
$$\geqq l(r\varrho l^{b-2} - (b-2)) - h \geqq 2l - h = l + h' \geqq h' + 1.$$

Damit ist jetzt nachgewiesen, daß ich den Modul für jeden Wert von n durch $\lambda^{h'+1}$ ersetzen kann, d. h. die oben getroffene Abschätzung der Relativspuren $s\left((1-\sqrt[l]{\alpha})^{n\,t}\right)$ ist so hoch genommen, daß ich mit den obigen Näherungswerten die Spur von $\log H_{s,t}$ mit der erforderlichen Genauigkeit mod $\lambda^{h'+1}$ bilden kann. Es ist also:

$$s(\log H_{s,t}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\lambda^{n\,s}}{n} l\,\lambda^{a_n h} \bmod \lambda^{h'+1}.$$

Meine letzte Aufgabe ist es jetzt, die Glieder dieser unendlichen Reihe bis zur Ordnung h' in λ festzustellen und explizit anzugeben. Dabei sind wiederum die obigen drei Fälle für $n = rl^b$ mit $b = 0$, $b = 1$ und $b \geqq 2$ zu unterscheiden.

1. Ist $(n, l) = 1$, so ist

$$n\,s + a_n h = \frac{\varrho n}{l} - \frac{b_n h}{l} > \frac{\varrho n}{l} - h.$$

Die Summanden $\frac{\lambda^{n\,s}}{n} l\,\lambda^{a_n h}$ sind also in λ mindestens von der Ordnung

$$l - 1 - h + \frac{\varrho n}{l} = h' + \frac{\varrho n}{l} - 1;$$

ist $n < \frac{l}{\varrho}$, so ist die Ordnung mindestens h', im Falle $n > \frac{l}{\varrho}$ ist

$$\frac{\lambda^{n\,s}}{n} l\,\lambda^{a_n h} \equiv 0 \bmod \lambda^{h'+1}.$$

2. Ist $n = rl$ mit $(r, l) = 1$, so ist die Ordnung von $\frac{\lambda^{ns+a_n h}}{r}$ gleich $rls + a_n h = rls + rht = r\varrho$. Hier sind sicherlich alle Summanden der Reihe $\frac{\lambda^{ns+a_n h}}{r}$ für $r > \frac{l}{\varrho}$ kongruent Null mod λ^l; so daß in den Fällen 1. und 2. nur endlich viele angebbare Ausdrücke der Form $\frac{\lambda^{ns}}{n} l \lambda^{a_n h}$ unterhalb der Ordnung $h' + 1$ in λ liegen.

3. Ist $n = rl^b$ mit $(r, l) = 1$ und $b \geqq 2$, so sind alle Summanden

$$\frac{\lambda^{ns+a_n h}}{r\, l^{b-1}} \equiv 0 \mod \lambda^{h'+1},$$

denn ihre Ordnung beträgt nach den obigen Ausführungen:

$$\begin{aligned} ns + a_n h - (b-1)(l-1) &= r\varrho l^{b-1} - (b-1)(l-1) \\ &\geqq 2\, l^{b-1} - (b-1)(l-1) \\ &\geqq 2\,(1 + (b-1)(l-1)) - (b-1)(l-1) \\ &\geqq 2 + (b-1)(l-1) \\ &\geqq 2 + l - 1 > h' + 1. \end{aligned}$$

Durch diese Betrachtungen ist jetzt der genaue Kongruenzwert von $s(\log H_{s,t}) = \log \eta_{s,t} = \log \beta$ modulo $\lambda^{h'+1}$ ermittelt. Es ist

$$s(\log H_{s,t}) = \log \beta \equiv -\sum_n \frac{\lambda^{n(ht+ls)}}{n} - \sum_m l \frac{\lambda^{(l-1)mh+ms}}{m} \mod \lambda^{h'+1},$$

wobei über m und n höchstens bis zum Werte $\frac{l}{ht+ls}$ zu summieren ist. Setze ich für l seinen Kongruenzwert $-\lambda^{l-1} \bmod \lambda^l$ ein, so erhalte ich:

$$\log \beta \equiv -\sum_n \frac{\lambda^{n(ht+ls)}}{n} + \sum_m \frac{\lambda^{l-1+ms+a_m h}}{m} \mod \lambda^{h'+1}.$$

Die Entwicklung von $\log \alpha$ lautet:

$$\log \alpha \equiv -\sum_r \frac{\lambda^{rh}}{r} \mod \lambda^{l-1},$$

wobei nur über die Werte $r < l$ zu summieren ist.

Ich bilde jetzt den Ausdruck $L(\alpha, \beta)$:

$$L(\alpha, \beta) = \sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^{-v} \log \alpha) \frac{1}{l} S(\zeta^v \log \beta).$$

Zur Feststellung des Kongruenzwertes von $L(\alpha, \beta) \bmod l$ genügt es, die obigen Näherungswerte für $\log \alpha$ und $\log \beta$ einzusetzen; denn die Glieder

von höherer Ordnung als $l-1$ (sogar h) bzw. $h' = l-h$ in λ beeinflussen nach dem Hilfssatz I (S. 236) $L(\alpha, \beta) \bmod l$ nicht. So ist

$$L(\alpha,\beta) \equiv \sum_{v=1}^{l-1} -v \frac{1}{l} \sum_{r} \frac{1}{r} S(\zeta^{-v\lambda^{rh}}) \frac{1}{l}\Big[\sum_{n} \frac{-1}{n} S(\zeta^{v\lambda^{n(ht+ls)}}) + \sum_{m} \frac{1}{m} S(\zeta^{v\lambda^{l-1+ms+a_m h}})\Big]$$

$$\equiv \sum_{r} \sum_{n} \frac{1}{rn} \sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^{-v\lambda^{rh}}) \frac{1}{l} S(\zeta^{v\lambda^{n(th+ls)}}) - \sum_{m} \frac{1}{m} \sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^{-v\lambda^{h}}) \frac{1}{l} S(\zeta^{v\lambda^{l-1+ms+a_m h}}) \quad \bmod l.$$

Hier durften in der zweiten Summe alle Glieder mit $r \geqq 2$ weggelassen werden, weil für sie die Exponentensumme mindestens gleich $rh - h'$ — also größer als l ist, was nach Hilfssatz I für diese Glieder „$\equiv 0 \bmod l$" bedeutet. Nach dem Hilfssatz I ist die Summe über v nur dann inkongruent Null mod l, wenn in einem Falle

1. $$rh + n(th + ls) = l,$$

im anderen Falle

2. $$h + l - 1 + ms + a_m h = l$$

ist. $L(\alpha, \beta)$ ist also stets kongruent Null mod l, wenn diese Sonderfälle nicht eintreten. Es bleibt noch zu beweisen, daß auch in den beiden Ausnahmefällen $L(\alpha, \beta) \equiv 0 \bmod l$ wird. Diese Tatsache kommt dadurch zustande, daß stets beide Fälle miteinander verkoppelt sind und sich durch diese Verbindung gerade der Kongruenzwert Null ergibt.

Für ein beliebiges m sei $h + l - 1 + ms + a_m h = l$, d. h. der zweite Sonderfall erfüllt. Dann wird

$$h(1 + a_m) = 1 - ms,$$

und a_m ist durch die folgende Gleichung bestimmt: $a_m l + b_m = mt$. Diesen Wert setze ich ein und erhalte:

$$h(l + mt - b_m) + msl = l$$

oder

$$(l - b_m) h + m(ht + ls) = l;$$

damit ist die Verkopplung des zweiten Falles mit dem ersten gezeigt. Es gehört zu jedem m, für das $h - 1 + ms + a_m h = 0$ ist, ein Wert $r_m = l - b_m$, für den $r_m h + m(th + ls) = l$ ist. Weiterhin gehören aber auch zu zwei verschiedenen Werten m und $\overline{m}$ stets zwei verschiedene Werte r_m und $r_{\overline{m}}$, denn es sind $b_m = mt - a_m l$ und $b_{\overline{m}} = \overline{m}\, t - a_{\overline{m}} l$ nur dann gleich, wenn $(m - \overline{m})\, t = (a_m - a_{\overline{m}})\, l$ ist. Diese Gleichung ist nur durch $m = \overline{m}$ zu erfüllen, da m und $\overline{m}$ kleiner als l sind. Somit ist gezeigt, daß $r_m = l - b_m$

von $r_{\bar{m}} = l - b_{\bar{m}}$ verschieden ist, falls $m \neq \bar{m}$ ist. Jetzt sind aber die letzten Schlüsse auch umkehrbar, und zu jedem Fall 1. der Art, daß

$$r_m h + m(th + ls) = l$$

ist, gehört stets der 2. Fall:

$$h + l - 1 + ms + a_m h = l.$$

Zum Schluß ist jetzt noch der Wert von $L(\alpha, \beta)$ anzugeben. Nach Hilfssatz I ist

$$L(\alpha, \beta) \equiv \sum_m \frac{1}{r_m m}(-r_m h) - \sum_m \frac{1}{m}(-h)$$
$$\equiv \sum_m \frac{-h}{m} - \sum_m \frac{-h}{m} \equiv 0 \bmod l.$$

Damit ist gezeigt, daß für jedes $\alpha = 1 - \lambda^h$ mit $h = 2, 3, \ldots, l-1$ stets $L(\alpha, \beta) \equiv 0 \bmod l$ wird, wenn β Relativnorm aus dem Oberkörper $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ ist.

Zu 4. Für $\alpha = 1 - \lambda^h$ mit $h = 2, \ldots, l-1$ bleibt noch zu zeigen, daß $L(\alpha, \beta) \equiv h' \bmod l$ wird, wenn $\beta = 1 - \lambda^{h'}$ mit $h + h' = l$ — also eine Nichtrelativnorm — ist.

In diesem Falle ist $\log \alpha = -\lambda^h \eta_1$ und $\log \beta = -\lambda^{h'} \eta_2$, wo η_1 und η_2 zwei nach positiven Potenzen von λ fortschreitende Einseinheiten sind, da α und β Exponentialgrößen sind. Ich erhalte:

$$L(\alpha, \beta) = \sum_{v=1}^{l-1} v \frac{1}{l} S(\zeta^{-v} \lambda^h \eta_1) \frac{1}{l} S(\zeta^v \lambda^{h'} \eta_2)$$
$$\equiv h' \equiv -h \bmod l \text{ nach Hilfssatz I.}$$

Damit ist der neue Beweis der expliziten Reziprozitätsformel für den l-ten Kreiskörper vollendet. Es ist durch λ-adische Betrachtungen im Kreiskörper k_λ und seiner Erweiterung $k_\lambda(\sqrt[l]{\alpha})$ die Identität des Normenrestsymbols $\left(\frac{\beta, \alpha}{\lambda}\right)$ mit dem Ausdruck $\zeta^{L(\alpha, \beta)}$ erwiesen worden. Zugleich ist eine vollständige Charakterisierung des Hilbertschen Normenrestsymbols für den l-ten Kreiskörper durch die Gruppeneigenschaft der Normen, den Vertauschungssatz und die Normierungsvorschrift

$$\left(\frac{1+l, \zeta}{\lambda}\right) = \left(\frac{\zeta}{1+l}\right) = \zeta^{\frac{N(1+l)-1}{l}} = \zeta^{-1}$$

gegeben worden.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Hasse für Anregung und Hilfe bei der Gestaltung dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank sagen.

(Eingegangen am 1. 9. 1931.)

Lebenslauf.

Ich, Herbert Vennekohl, wurde am 6. März 1908 als Sohn des Kaufmanns Julius Vennekohl und seiner Ehefrau Antonie geb. Benthin zu Essen geboren. Ich bin preußischer Staatsangehörigkeit und evangelischer Konfession. Von Ostern 1914 bis Ostern 1917 besuchte ich die Vorschule des Helmholtzrealgymnasiums zu Essen. Ostern 1917 wurde ich in die Sexta aufgenommen und bestand am 9. März 1926 an der gleichen Anstalt das Abiturientenexamen. In den Jahren 1926 bis 1930 studierte ich in Marburg (S. S. 1926 bis W. S. 1927/28 und S. S. 1929 bis S. S. 1930) und Berlin (S. S. 1928 bis W. S. 1928/29) Mathematik, Physik, ev. Theologie, und Philosophie. Am 16. Januar 1931 bestand ich in Marburg die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen. Mein erstes Vorbereitungsjahr als Studienreferendar legte ich von Ostern 1931 bis Ostern 1932 an der Oberrealschule und dem Realgymnasium zu Marburg ab. Seit Ostern 1932 bin ich dem Bezirksseminar Wuppertal-Barmen überwiesen. Am 8. Juli 1931 bestand ich mein Rigorosum. Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten: Bertholet, Bieberbach, Byk, Deißmann, Fabricius, Feigl, Galling, Hammerstein, Hettner, von Laue, Liebert, Michaelis, Nernst, Neumann von Margitta, Planck, Erh. Schmidt, Spranger, Werdermann in Berlin; Boette, Bultmann, Busch †, Engelhardt, Fascher, Fraenkel, Frank, Frick, Grüneisen, Häpke †, Hasse, Heiler, Hensel, Hermelink, Jaeck, Jaensch, Köppe, Krafft, Neumann, Niebergall, Schaefer, Schulze, von Soden, Tomaschek und Zühlke in Marburg. Allen meinen sehr verehrten Lehrern bin ich zu herzlichstem Danke verpflichtet, namentlich aber Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Hensel und Herrn Prof. Dr. H. Hasse, die mir beide Anregungen zu meiner vorliegenden, mathematischen Arbeit gaben und ihrer Ausführung stets reiches Interesse entgegenbrachten.